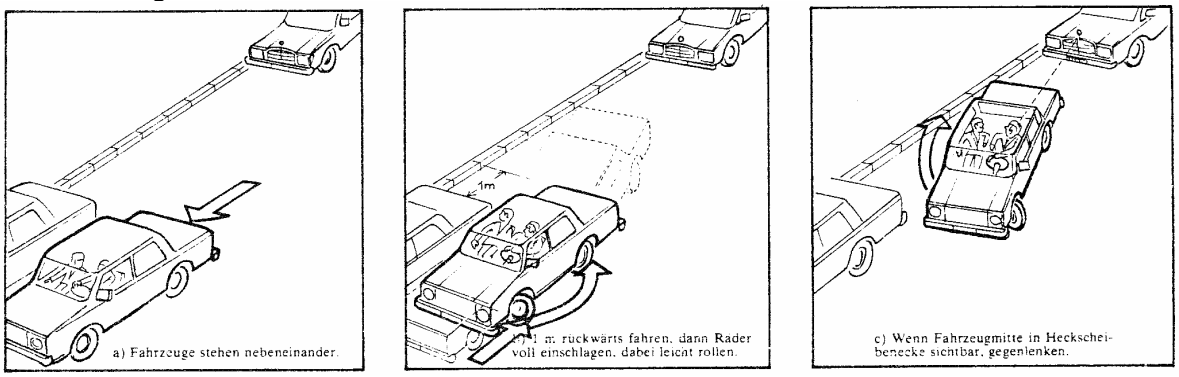
Warum man besser rückwärts einparkt, oder: Die Einparkformel

Für viele ist es eine große Herausforderung: Rückwärts am Straßenrand einparken, womöglich noch mit einer Schlange entnervt wartender Autofahrer im Nacken …
Auf Youtube gibt es eine Vielzahl von Videos zum Thema; die folgenden drei kurzen Filme zeigen das Spektrum auf:
http://www.youtube.com/watch?v=xZuXBYvnUS0&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=GmGWfk449Jc&feature=endscreen&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=Qcf9UUUsbvE&feature=related

In einem Übungsmaterial einer Fahrschule wird der Parkvorgang wie folgt beschrieben:

3. Rückwärtsfahren in eine Parklücke (Länge ca. 8 m) zwischen hintereinander stehenden Fahrzeugen.



In diesem Modul wird das Problem des Einparkens mathematisch untersucht. Das Ziel ist einerseits, den „optimalen“ Einparkvorgang zu beschreiben, und andererseits die benötigte Länge einer Parklücke möglichst genau festzustellen.
Nach kurzen Vorüberlegungen werden Versuche mit Bobby Cars durchgeführt, anschließend können die Ergebnisse mit Geogebra in eine Computersimulation umgesetzt/nachgestellt werden, und schließlich wird die Frage nach der Mindestlänge einer Parklücke mathematisch exakt beantwortet.

1 Grundlagen

Für die folgenden Untersuchungen legen wir einige Variablen fest:

B	Breite des Autos
L	Länge des Autos
l	Abstand zwischen Hinterachse und Front
R	Radius des Wendekreises
s	Seitlicher Abstand zum benachbarten Auto bei Beginn des Parkvorganges

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Kurven

10. Februar 2012

P Mindestlänge der Parklücke
α Drehwinkel im Wendekreis

Benötigte Begriffe:

Wendekreis:
Befestigt man an der vordersten linken Ecke des Fahrzeugs einen Stab, der auf dem Boden schleift und fährt man dann den kleinstmöglichen Rechts–Kreis bei voll eingeschlagenem Steuerrad, so beschreibt dieser Stab einen Kreis, den Wendekreis des Fahrzeugs. Sein Durchmesser D wird in den Wagenpapieren verzeichnet.

Ortskurve:
Eine Ortskurve oder Spur ist (hier) die Kurve, die ein Punkt während einer Bewegung durchläuft.

Für die weitere Arbeit sollten Sie folgende Punkte erledigen:

- Ermitteln Sie die Größen B, L, l und R für ein Bobby Car.
- Zeichnen Sie den Wendekreis des Bobby Cars, indem Sie die Ortskurve der vordersten linken Ecke aufzeichnen.
- Für die nachfolgenden Simulationen in Geogebra ist es wichtig, den Mittelpunkt des Wendekreises zu konstruieren. Untersuchen Sie dazu, wie Sie den Mittelpunkt konstruieren können, wenn Sie von der Startposition des Bobby Cars ausgehen.
- Zeichnen Sie weitere Ortskurven exponierter Punkte des Bobby Cars. Zeichnen Sie auch die Ortskurve der Mitte der Hinterachse auf. Dazu müssen Sie eine Haltevorrichtung für einen Stift o. ä. erfinden.



2 Praktische Versuche

Untersuchen Sie das Problem des Einparkens, indem Sie z. B. …

- vorwärts „am Straßenrand“ einparken,
- rückwärts „am Straßenrand“ einparken,
- beim Einparken die Ortskurven verschiedener exponierter Punkte des Bobby Cars aufzeichnen,
- versuchen, mit einer möglichst kleinen Parklücke (messen!) auszukommen,
- den Einparkvorgang von oben filmen usw.

Machen Sie zu Ihren Experimenten Aufzeichnungen, damit Sie die Ergebnisse anschließend für die Simulation in Geogebra verwenden können.

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

3 Grafische Auswertung mit Geogebra

3.1 Einleitung

Nach den praktischen Versuchen können Sie nun den optimalen Parkvorgang in Geogebra simulieren. Als „Vorübung“ stellen Sie nach der Anleitung unten den Wendekreis mit Hilfe von Geogebra dar. Da der Wendekreis die kleinstmögliche Drehbewegung des Autos ist, kommt ihm bei optimalem Einparken natürlich eine zentrale Rolle zu.

Sollten Sie später bei der Bedienung des Programmes Geogebra Schwierigkeiten haben, dann finden Sie unter http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_de.pdf eine grundlegende Einführung zu Geogebra. Die ersten Konstruktionen werden unten aber auch Schritt für Schritt erklärt.

Wenn Sie zuerst noch etwas spielen wollen, können Sie das Einparken auch anhand folgender Internetseiten „üben“ oder mit einem Applet spielen:
http://www.pepere.org/flash-spiel_7_x/ruckwarts-einparken_1.html
http://www.fahrschule.de/einparken/
http://www.mathematik-labor.org/simulation/neue_homepage/einparken/sites/seite_3_01.html
http://www.juergen-roth.de/dynageo/einparken/index.html

3.2 Wendekreis

Anhand der Konstruktion des Wendekreises eines Autos machen wir uns mit der grundlegenden Bedienung von Geogebra vertraut. Die Konstruktion besteht aus folgenden Schritten:

- Konstruktion des Autos (= Rechteck)
- Konstruktion der Hinterachse (auf der der Mittelpunkt des Wendekreises liegt)
- Konstruktion des Mittelpunktes und Zeichnung des Wendekreises
- Animation der Drehung des Autos im Wendekreis

Zuerst muss das Rechteck gezeichnet werden, das das Auto symbolisiert. Dazu geben Sie A=(3,0) ENTER in die Eingabezeile ein, gefolgt von B=(8,0), C=(8,2), D=(3,2). (Abb. 1)
Mit dem Vieleck-Werkzeug werden die Punkte dann der Reihe nach ausgewählt und dadurch zu einem Rechteck (= Vieleck1) verbunden. Dieses Rechteck kann später separat ausgewählt, gedreht usw. werden. (Abb. 2)

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

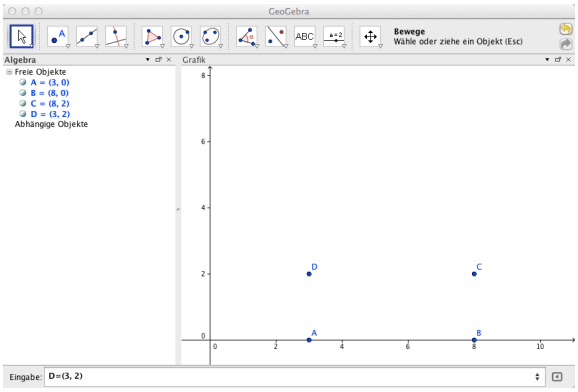


Abb. 1

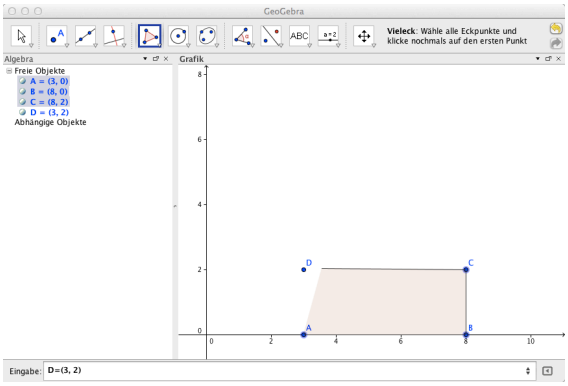


Abb. 2

Da der Mittelpunkt des Wendekreises auf der Verlängerung der Hinterachse liegt, muss diese nun konstruiert werden. In unserem Beispiel soll das Heck 1 m über das insgesamt 5 m lange Auto hinausragen. Deshalb wählen Sie das Werkzeug „Kreis mit Mittelpunkt und Radius“ und schlagen um A und D jeweils einen Kreis mit dem Radius 1. Der Schnittpunkt des Kreises mit der jeweiligen Kante des Rechteckes (Werkzeug „Schneide zwei Objekte“ auswählen) ergibt die Punkte E und F, durch die mit Hilfe des Werkzeuges „Strahl durch zwei Punkte“ die Hinterachse und ihre Verlängerung konstruiert wird. (Abb. 3)
Nun schlagen Sie um den Punkt B (die vorderste rechte Ecke des Fahrzeuges) ein Kreis mit dem Radius des Wendekreises; in unserem Beispiel soll dieser 6 m betragen. Der Schnittpunkt des Kreises mit dem Strahl durch E und F ist der Mittelpunkt G des Wendekreises. (Abb. 4)

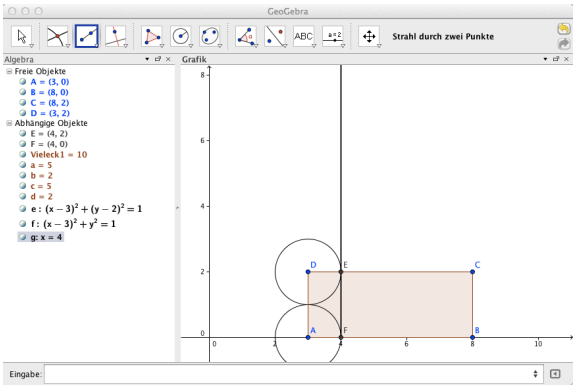


Abb. 3

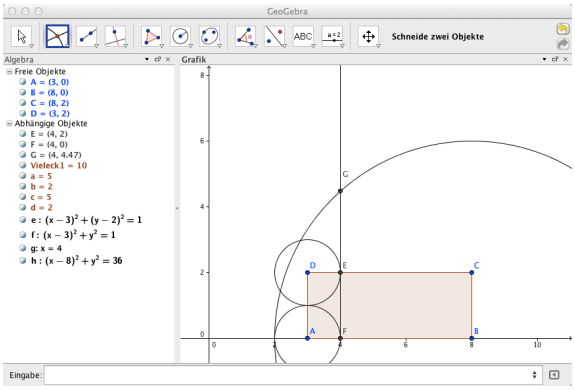


Abb. 4

Damit das Rechteck („Auto“) im Wendekreis animiert werden kann benötigen Sie einen Schieberegler für den Wendekreis. Tippen Sie dazu w=45° in die Eingabezeile und öffnen Sie dann das Eigenschaftsfenster für w (rechter Mausklick). Klicken Sie hier erst auf „Objekt anzeigen“ und dann auf den Karteireiter „Schieberegler“. Sinnvoll sind hier z. B. die Werte min =0°, max=360° und Breite = 360. Wählen Sie dann das Werkzeug „Drehe Objekt um Punkt mit Drehwinkel“, klicken Sie auf das Rechteck ABCD, anschließend auf den Mittelpunkt G und geben Sie dann in das sich öffnende Fenster als Drehwinkel „w“ ein. Bewegen Sie dann den Schieberegler für w. (Abb. 5)

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

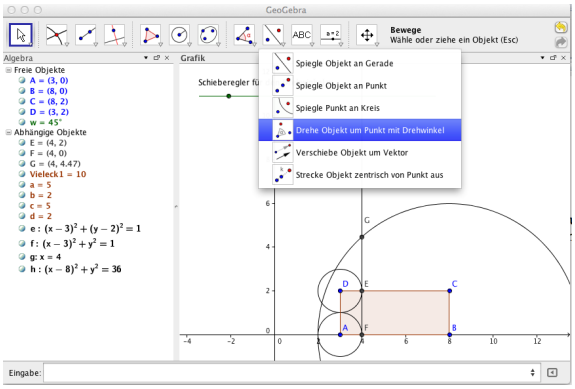


Abb. 5

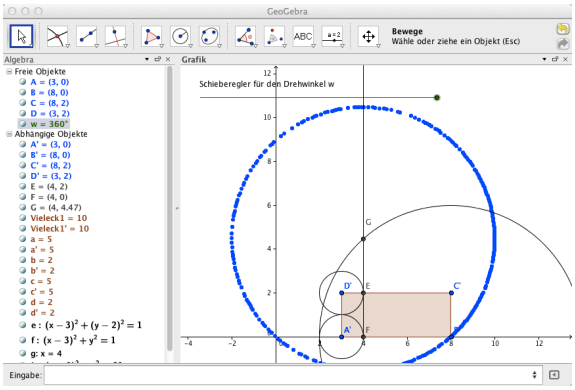


Abb. 6

Abschließend können Sie noch die Ortskurve verschiedener Punkte aufzeichnen. Öffnen Sie dazu z. B. das Eigenschaften-Fenster des Punktes B’ und klicken Sie dort auf „Spur anzeigen“. Bewegen Sie den Schieberegler erneut. (Abb. 6)
Außerdem können Sie nun die Konstruktion übersichtlicher gestalten, indem Sie die Anzeige der Hilfsobjekte ausblenden; dies geschieht jeweils im Eigenschaften-Fenster.

3.3 Rückwärts einparken

Für die Simulation des rückwärts Einparkens mit Geogebra müssen Sie im Grunde nur zwei Bewegungen im Wendekreis miteinander kombinieren: einmal in die eine Richtung, anschließend in die andere. Die zweite Drehbewegung können Sie dadurch erhalten, dass Sie vom Rechteck A’B’C’D’ ausgehen, und für dieses ebenfalls einen Wendekreis konstruieren. Um Ihnen den Start zu erleichtern, steht unter www.langemathenacht.de die Geogebra-Datei „Einparken Start.ggb“ zum Download bereit, von der aus Sie mit der Arbeit beginnen können. (Abb. 7) Konstruieren Sie zunächst wie oben beschrieben den Wendekreis des „Autos“ ABCD in eine Richtung, anschließend den Wendekreis des Rechtecks A’B’C’D’ in die andere Richtung. Vergleich Sie Ihr Ergebnis mit Abb. 8.
Ebenfalls auf der Homepage finden Sie die Datei „Einparken.ggb“, die das Einparken (eines 5 m langen und 2 m breiten Autos in eine 7 m lange Parklücke) beschreibt. Benutzen Sie diese Datei, wenn Sie Schwierigkeiten mit Geogebra haben. (Abb. 8)

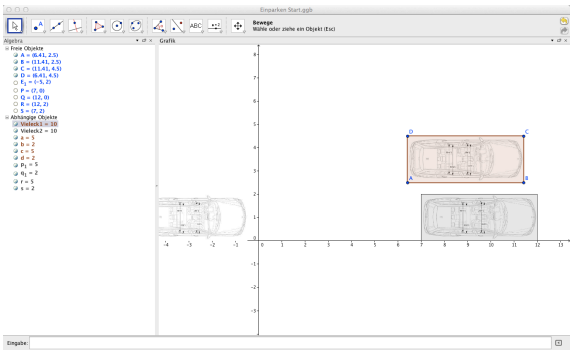


Abb. 7

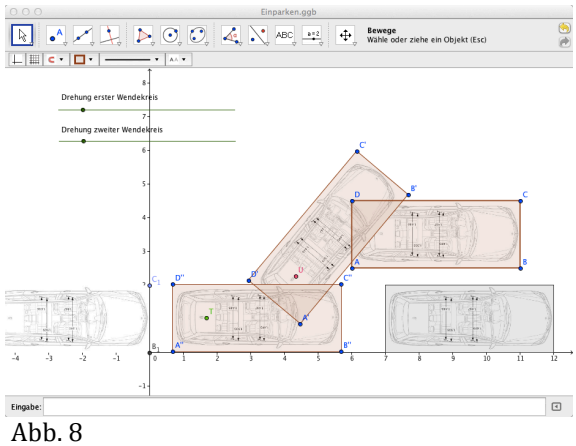


Abb. 8

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Natürlich können Sie nun – oder nach der Durcharbeit von Abschnitt 4 - Ihr Geogebra-Programm noch verbessern: Z. B. wäre es schön, Autos statt Rechtecke zu sehen, und auch die Eingabe genauer Maße für die Breite, Länge und den Wendekreis wäre eine tolle Sache. Versuchen Sie, ein möglichst optimales Ergebnis zu erzielen.

Passen Sie Ihr Programm auch so an, dass es zu den Maßen eines Bobby Cars passt und vergleichen Sie mit Ihren Ergebnissen aus den praktischen Versuchen.

Anschließend können Sie mit Ihrem Programm das Einparken am Straßenrand simulieren. Versuchen Sie, die benötigte Parklücke möglichst klein zu halten, indem Sie mit den Drehwinkeln experimentieren. Halten Sie Ihre Ergebnisse fest.

4 Die Einparkformel

Abschließend geht es in diesem Modul um die rechnerische Bestimmung der kleinstmöglichen Parklücke und des dazugehörigen Drehwinkels. Am einfachsten ist es, wenn Sie anhand der fiktiven Maße 5 m Länge, 2 m Breite, Wendekreisradius 6 m und Abstand Front-Hinterachse 4 m (die oben schon benutzt wurden) ein Beispiel berechnen, bevor Sie sich an die allgemeinen Formeln setzen. Für die Rechnungen reichen einfache Dreiecksberechnungen, der Satz des Pythagoras und die binomischen Formeln. Sehr hilfreich sind die folgenden vier Abbildungen, die einem Aufsatz von Jürgen Roth zum Thema entnommen wurden:

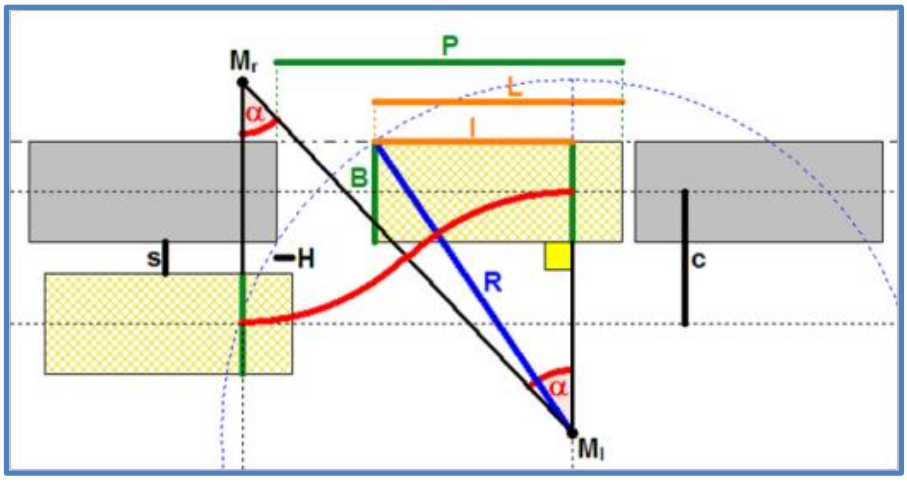


Abb. 9: Die verwendeten Abkürzungen (siehe auch Kapitel 1 Grundlagen)

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

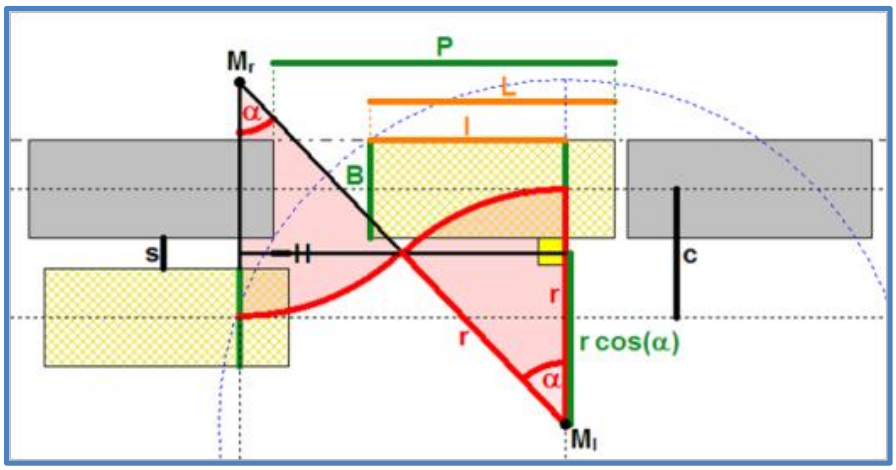


Abb. 10: Berechnungshilfe zum Drehwinkel α

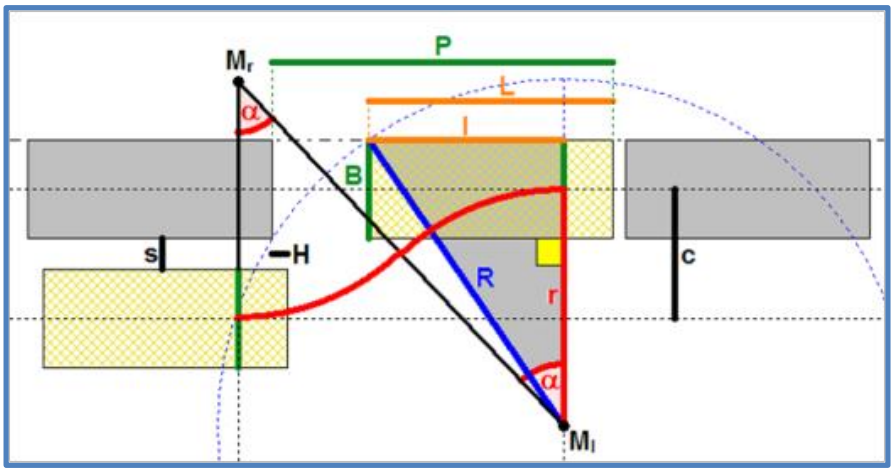


Abb. 11: r lässt sich mit R, l und B berechnen

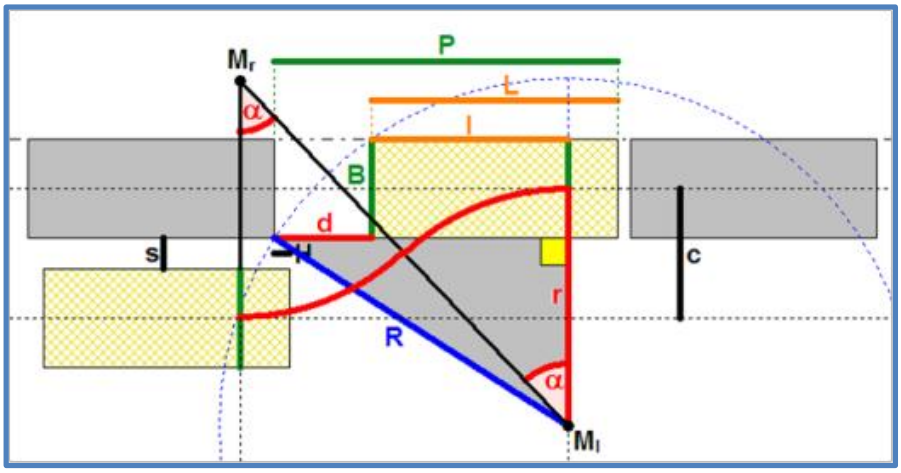


Abb. 12: Berechnungshilfe für d bzw. P

Der Winkel α last sich mit Hilfe von Abb. 10 einfach ausrechnen; Sie erhalten:

(1) $$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{B+s}{2r}\right)$$

Nun sollten Sie statt r besser die gebräuchliche Größe R (also den Radius des Wendekreises) verwenden. Dazu überlegt man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und Abb. 11, dass gilt:

(2) $$r = \sqrt{R^2 - l^2} - \frac{B}{2}$$

Setzen Sie (2) in (1) ein, so bekommen Sie einen Ausdruck für den im Wendekreis abzufahrenden Drehwinkel, der nur von der Fahrzeugbreite, dem anfänglichen Sicherheitsabstand zum nebenstehenden Fahrzeug und dem Abstand Front-Hinterachse (d. i. die Größe l) abhängt.

Für die Gesamtlänge der Parklücke gilt nach Abb. 12:

(3) $$P = d + L$$

L ist gegeben. d können Sie mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen, da $d + l$ Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist. Nach einigen Rechnungen und mit Ausdruck (2) erhalten Sie schließlich das Ergebnis

(4) $$P = \sqrt{l^2 + 2B\sqrt{R^2 - l^2} - B^2} - l + L$$

Diese Formel sieht aufgrund der doppelten Wurzel zwar recht beeindruckend aus – ist aber im Grunde recht einfach, fußt sie doch – wie Sie gesehen haben – auf einfacher Mittelstufenmathematik.

5 Literatur

Der für dieses Modul grundlegende Artikel ist

Jürgen Roth: Experimentelle Geometrie und Projektarbeit am Beispiel „Einparken“. In: Reinhard Oldenburg, Matthias Ludwig (Hrsg.): Experimentelle Geometrie. Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2007 (http://www.juergen-roth.de/einparken/)

Darüber hinaus wurden folgende Beiträge zur Kenntnis genommen:

Norbert Herrmann, Ein mathematisches Modell zum Parallelparken, Inst. f. Angew. Mathematik, Univ. Hannover, 24. November 2003 (http://www.ifam.uni-hannover.de/~herrmann/PARKEN.PDF)
Norbert Herrmann, Mathematik ist überall, München 2007
Jascha Hoffmann
http://www.nytimes.com/interactive/2010/12/19/magazine/ideas2010.html#Perfect_Parallel_Parking

B. Müller, J. Deutscher, Zweistufige Trajektorienplanung für das automatische Einparken (http://www.rt.eei.uni-erlangen.de/PUBLIKATIONEN/PDF/Mueller2006_140.pdf)
Bernhard Müller, Joachim Deutscher und Stefan Grodde, Trajectory Generation and Feedforward Control for Parking a Car (http://www.rt.eei.uni-erlangen.de/PUBLIKATIONEN/PDF/Mueller2006_164.pdf)
http://sciencev1.orf.at/science/news/93346
https://www.ma.rhul.ac.uk/SRBparking
http://www.geogebratube.org/material/show/id/3023